SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1998-99

Maria Manfredini

EQUAZIONI PARABOLICHE NON LINEARI NEI PROCESSI DI ELABORAZIONE DI IMMAGINI

25 marzo 1999

Tecnoprint - Bologna 2000

Riassunto. Viene fornita una rassegna di modelli matematici, equazioni differenziali nonlineari di tipo ellittico-parabolico, nei processi di elaborazione di immagini e di sequenze di immagini.

Vengono inoltre presentati risultati recenti e problemi ancora aperti che riguardano l'esistenza, la regolarità e la stabilità delle soluzioni di alcune equazioni modello.

Summary. We present somo mathematical models, nonlinear differential equations of elliptic-parabolic type, arising in immage processing.

We also present some recently results and open problems about the existence, the regularity and the stability of solutions of such equations.

1. Preliminari.

Un' immagine in bianco e nero si può rappresentare mediante una funzione u definita in $\mathbf{R}^N$ (con $N = 2$ oppure $N = 3$) dove $u(x)$ rappresenta il livello di grigio nel punto x.

Il primo passo in un processo di elaborazione di immagini è quello di ridurre il rumore presente nell'immagine per ottenerne una versione modificata che contenga informazioni significative dell' originale. L'immagine data u_0 è quindi trasformata in nuove immagini e il principale parametro di questa trasformazione è la "scala" la quale fornisce il grado di regolarizzazione o in un certo senso, la misura dell' intorno del punto x considerato per stimare il livello di grigio in x.

L'analisi multiscala è quindi una famiglia di trasformazioni $(T_t)_{t\geq 0}$ che applicata alla figura originale u_0 fornisce una sequenza di immagini semplificate

$$u(x,t) = (T_t u_0)(x),$$

la funzione $u(x,t)$ è detta analisi dell'immagine alla scala t.

L. Alvarez, F.Guichard, P.L. Lions e J.M. Morel in [1] hanno dimostrato che sotto ragionevoli ipotesi su $(T_t)_{t\geq 0}$ (principi formali o assiomi) la funzione $u(x,t)$ è soluzione di un'equazione parabolica con dato iniziale l'immagine originale.

Il classico modello multiscala formalizzato da Witkin nel 1983 in [20] è costituito dall'equazione del calore ed è l'unico modello in cui $(T_t)_{t\geq 0}$ è lineare ed invariante per isometrie. Questo modello nasce dall' idea di realizzare un'analisi multiscala che regolarizzi la figura iniziale u_0 mediante una convoluzione con una funzione G gaussiana $G(x,t) = ct^{-1/2}\exp(-|x|^2/(4t))$. Il principale svantaggio di questa regolarizzazione è che non solo riduce il rumore ma sfuma anche i contorni della figura rendendo così difficile la sua identificazione. Più precisamente, la linearità dell'operatore produce una perdita di *edges* cioè dei profili delle figure presenti nell'immagine, ossia l'insieme dei punti in cui il gradiente spaziale dell'immagine regolarizzata ha un massimo.

Un importante miglioramento del modello fu introdotto nel 1987 da J. Malik e P. Perona in [15]. Essi proposero di sostituire l'equazione del calore con un'equazione non lineare dei mezzi porosi del tipo

$$\partial_t u = div(g(|Du|)Du), \tag{1}$$

dove g è una funzione di classe $C^\infty(\mathbf{R})$ non negativa, non crescente, tale $g(0) = 1$ e g tende a zero all'infinito. In questo modo il processo di regolarizzazione è condizionato, nel senso che, se il gradiente spaziale di u è grande allora la diffusione è piccola e quindi è possibile una precisa localizzazione degli *edges*. Se il gradiente in un punto è piccolo la diffusione tende a regolarizzare maggiormente vicino a quel punto.

I risultati sperimentali furono incoraggianti (gli *edges* infatti rimangono stabili lungo la scala) tuttavia l'equazione presenta serie difficoltà teoriche. Infatti, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} div(g(|Du|)Du) &= g(|Du|)\Delta u + g'(|Du|)|Du|^{-1}((D^2u)Du, Du) \\ &= g(|Du|)u_{\zeta\zeta} + H'(|Du|)u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

dove $H(s) = sg(s)$,

$$u_{\varsigma\varsigma} = \left(\frac{(D^2u)Du^+}{|Du^+|}, \frac{Du^+}{|Du^+|} \right)$$

è il termine di diffusione nella direzione ortogonale al gradiente e

$$u_{\eta\eta} = \left(\frac{(D^2u)Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|} \right)$$

è il termine di diffusione nella direzione del gradiente.

Poichè g è nonnegativa il termine $g(|Du|)u_{\varsigma\varsigma}$ produce una diffusione nella direzione degli *edges*.

Se la funzione H' (il coefficiente di diffusione nella direzione ortogonale agli *edges*) è non negativa allora l'equazione è di tipo parabolica e vale il principio del confronto. Se invece $H'(s)$ è negativa per qualche s allora l'equazione (1) corrisponde ad una equazione del calore retrograda e quindi non ci si può aspettare unicità della soluzione. (Si veda [12] per un semplice esempio).

Nel 1992, L. Alvarez, P.L Lions e J. M. Morel in [2] hanno proposto un modello basato sull'equazione del moto per curvatura media

$$\partial_t u = |Du|\, div\,(Du/|Du|). \tag{2}$$

Questa equazione non produce soltanto una diffusione di u nella direzione ortogonale al suo gradiente. Infatti,

$$\partial_t u = |Du| div\,(Du/|Du|) = \Delta u - ((D^2u)Du, Du)/|Du|^2$$

e il secondo termine corrisponde ad una inibizione della diffusione nella direzione del gradiente. (La funzione u viene regolarizzata maggiormente nei punti lontani dagli *edges*, con una regolarizzazione minima degli *edges* stessi). In questo modello gli *edges* non sono altro che i bordi degli insiemi di livello di u.

L'equazione (2) ha una sua interpretazione geometrica: almeno formalmente gli insiemi di livello della soluzione $u(\cdot, t)$ evolvono nella direzione normale con una velocità proporzionale alla loro curvatura media, almeno nella regione in cui u è regolare e il gradiente di u è diverso da zero. Una teoria delle soluzioni deboli basata sulla nozione di soluzione viscosa (cfr. [8]) fu proposta da Y.G.Chen, Y. Giga e S.Goto in [7], L.C.Evans e J. Spruck in [9], e da molti altri autori.

Successivamente, F. Cattè, P.L. Lions, J. M. Morel e T. Coll in [6] hanno considerato il seguente modello, che è una sintesi dell'idea di Perona e Malik, ma che è consistente dal punto di vista formale

$$\begin{cases} \partial_t u = div\,(g(|DG_\sigma * u|)Du) & \text{in } \Omega\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{on } \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

dove

$$G_\sigma(x) = c\sigma^{-1/2} \exp(-|x|^2/4\sigma)$$

e la funzione g è come nel modello di Perona-Malik.

Poichè la funzione $G(x,t) \equiv G_t(x)$ è la soluzione dell'equazione del calore, il termine $(DG_\sigma * u)(x,t)$ è il gradiente, al tempo σ, della soluzione del calore con dato iniziale $u(x,t)$.

In [6], viene provato che il problema (3), con dato iniziale $u_0 \in L^2(\Omega)$ e dato al bordo di tipo Neumann, ha un'unica soluzione di classe $C^\infty(\overline{\Omega}\times]0,T[)$.

(Il dato al bordo di tipo Neumann è quello più naturale nel processo di elaborazione di immagini, infatti, corrisponde ad una riflessione della figura attraverso il bordo e ha il vantaggio di non imporre nessun valore al bordo e quindi di non creare un *edge* su di esso).

Infine, L. Alvarez, P.L. Lions e J.M. Morel hanno proposto un modello basato sull'equazione del moto per curvatura media e sul metodo di stima precedente

$$(4) \qquad \begin{cases} \partial_t u = g(|DG_\sigma * u|)|Du| div\,(Du/|Du|) & \text{in } \Omega\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{on} \quad \Omega. \end{cases}$$

In (4) il termine $g(|DG_\sigma * u|)|$ controlla la velocità di diffusione: se il gradiente di u ha media piccola in un intorno di x allora x è considerato un punto interno di una regione regolare dell'immagine e quindi la diffusione è forte. Altrimenti, il punto x viene considerato un punto di *edge* e la velocità di diffusione viene diminuita.

In [2] viene provato un teorema di esistenza e unicità (in senso viscoso) per soluzioni continue in $\mathbf{R}^N \times [0,+\infty[$, appartenenti ad $L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\mathbf{R}^N))$, per ogni $T > 0$, ($W^{1,\infty}(\mathbf{R}^N)$ è lo spazio delle funzioni lipschitziane e limitate), qualora $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^N)$.

Inoltre se u e v sono soluzioni del problema (4), con dati iniziali rispettivamente u_0 e v_0, allora esiste una costante positiva c tale che

$$\sup_{t\in[0,T]} ||u(\cdot,t) - v(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \leq c\,||u_0 - v_0||_{L^\infty(\mathbf{R}^N)}.$$

2. Assiomi ed equazioni fondamentali nell'elaborazione di immagini

Come anticipato nell'introduzione, L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions e J.M. Morel in [1] hanno dimostrato che le analisi multiscala $(T_t)_{t\geq 0}$ sono governate in modo naturale da equazioni di tipo parabolico con dato iniziale l'immagine originale e queste equazioni possono essere dedotte da assiomi naturali sull'analisi multiscala.

Il modello più semplice è quello della piramide visuale il cui dato iniziale è la figura originale u_0, l'output è l'immagine multiscala $u(x,t)$ e t è un parametro che può essere identificato con la misura dell' intorno di x che è stato considerato per determinare il valore di $T_t u_0(x)$. La successioni di immagini è così ottenuta mediante una sequenza di filtri $(T_t)_{t\geq 0}$ sulla quale vengono fatte delle richieste formali che si possono distinguere in assiomi architetturali (causalità, regolarità), assiomi di stabilità (principio del confronto) e assiomi morfologici (invarianza per traslazioni, invarianza di scala).

Assiomi architetturali.

[*Causalità*] (L'immagine alla scala t può essere dedotta dalle immagini alle scale precedenti).

Esiste una famiglia di operatori di traslazione $(T_{t,s})_{t,s\geq 0}$ tali che $T_{t,0} = T_t$ e

$$T_{t+s} = T_{t+s,s} \circ T_s \quad \forall s,t,h \geq 0.$$

[*Località*] (Il valore di $T_t f$ per t piccolo, in ogni punto x, è determinato dal comportamento di f vicino ad x).

$$(T_{t,s}f - T_{t,s}g)(x) = o(t-s) \quad \text{per } t-s \to 0^+,$$

per tutte le funzioni $f, g \in C_b^\infty$ tali che $Df, Dg \neq 0$ e $D^\alpha f = D^\alpha g$ in R^N, $\forall |\alpha| > 0$.

[*Regolarità*]

$$||T_{t+s,s}(f+hg) - T_{t+s,s}f - hg||_\infty \leq cst \quad \forall s,t,h \in [0,1]$$

e $\forall f, g \in C_b^\infty$ tali che $Df, Dg \neq 0$. Inoltre

$$||T_{t+s,t}f - T_{s,0}f||_\infty \leq csn(t)$$

e $\forall f \in C_b^\infty$ tali che $Df \neq 0$. Dove $n(t) \to 0$ se t tende a zero, uniformemente in $s \in]0,1]$.

Principio del confronto.

[*Principio del confronto*] (Se un'immagine è più chiara di un'altra di un'altra allora quest'ordine si conserva lungo l'analisi).

$$T_t(f) \leq T_t(g) \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad \forall t \geq 0$$

e $\forall f, g \in C_b^\infty$ tali che $Df, Dg \neq 0$.

Assiomi morfologici.

[*Invarianza di scala di grigio*] (L'analisi non si altera se cambia il contrasto).

$$T_t(h(f)) = h(T_t(f)) \quad \text{per tutte le funzioni } h \text{ monotone crescenti}$$

e $\forall f \in C_b^\infty$ tale che $Df \neq 0$.

[*Invarianza per traslazione*]

$$T_t(\tau_h(f)) = \tau_h(T_t(f)) \quad \forall h \in \mathbf{R}^N, t \geq 0 \quad \forall f \in C_b^\infty, Df \neq 0,$$

dove $\tau_h f(x) = f(x+h)$.

Teorema (Theorem 2 in [1]). *Supponiamo che $(T_t)_t$ soddisfi gli assiomi precedenti. Allora esiste una funzione $F = F(A,p,x)$, definita su $S^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ e continua per $p \neq 0$, tale che*

$$\text{(i)} \qquad \frac{T_{t+s,s}f - f}{s} \to F(D^2f, Df, t) \quad \text{per } s \to 0 \quad \text{e } \forall t \geq 0$$

uniformemente su $\mathbf{R}^N$ (escluso i punti in cui $Df = 0$) e $\forall f \in C_b^\infty$ tale che $Df \neq 0$;

$$\text{(ii)} \qquad F(A,p,x) \geq F(B,p,x) \quad \forall p \in \mathbf{R}^N, t \geq 0, \forall A, B \in S^N \text{ con } A \geq B.$$

(F è un generatore infinitesimale del semigruppo T_t).

Inoltre, se u_0 è una funzione uniformemente continua e limitata, allora la funzione

$$u(x,t) = T_t(u_0)(x)$$

è l'unica soluzione viscosa continua e limitata su $\mathbf{R}^N \times [0,+\infty[$, uniformemente continua in x, uniformemente rispetto a t, del problema

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \partial_t u = F(D^2u, Du, t) & \text{in } \mathbf{R}^N \times [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Questo approccio all'analisi multiscala consente di caratterizzare assiomaticamente la maggior parte dei modelli già presenti e di introdurne dei nuovi.

Teorema. *Supponiamo che $(T_t)_t$ verifichi gli assiomi precedenti escluso l'invarianza per scala di grigio. Supponiamo inoltre che T_t sia lineare, invariante per isometrie, cioè*

$$T_{t,s}(Rf) = RT_{t,s}(f) \quad \forall t, s \geq 0, \forall f \in C_b^\infty, Df \neq 0$$

dove $(Rf)(x) = f(Rx)$, R è una trasformazione ortogonale di $\mathbf{R}^N$ e

$$T_t(f + c) = T_t(f) + c \quad \textit{per ogni costante } c.$$

Allora $ux, t) = T_t(u_0)(x)$è soluzione dell'equazione del calore

$$\begin{cases} \partial_t u = \mu \Delta u & in\ \mathbf{R}^N \times [0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & in\ \ \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

dove μ è una opportuna costante positiva.

Osservazione. Il modello di diffusione anisotropo di Perona-Malik soddisfa gli assiomi architetturali e le elementari proprietà di invarianza (isometria e traslazioni nello spazio). L'invarianza per scala di grigio non è mai soddisfatta. Infatti, se lo fosse allora $F(\lambda A, \lambda p) = \lambda F(A, p)$, $\forall \lambda > 0$ e $\forall A, p$, e poichè

$$F(A, p) = g'(|p|)|p|^{-1}(Ap, p) + g(|p|)\, traccia(A)$$

scegliendo la matrice simmetrica A con traccia diversa da zero e tale che $Ap = 0$, si ottiene $g(\lambda|p|) = g(|p|)$ per ogni $\lambda > 0$ e quindi g è necessariamente una funzione costante.

Anche l'equazione del calore non la soddisfa, infatti se u è tale che $\partial_t u = \Delta u$ e $u = h(v)$, allora $h'(v)\partial_t v = h'(v)\Delta v + h''(v)|Dv|^2$ e quindi $h''(v)|Dv|^2 = 0$ e poichè v è arbitrario si ottiene $h'' = 0$. Concludendo, l'equazione del calore è invariante solo per trasformazioni affini della scala di grigio.

Teorema. *Se $(T_t)_t$ è un'analisi multiscala che soddisfa l'assioma di invarianza per di scala di grigio e se $N = 2$, allora la funzione F in (5) assume la forma seguente*

$$F(D^2u, Du, t) = |Du| G\left(curv(u), \frac{Du}{|Du|}, t\right) \tag{6}$$

dove la funzione G è una funzione continua in $\mathbf{R} \times (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}$, nondecrescente rispetto al suo primo argomento, e $curv(u)(x, t)$ è la curvatura dell'insieme di livello di u passante per x

$$curv(u) = div\, \frac{Du}{|Du|}.$$

Osservazioni.

(1) Si osservi che se $G \equiv 1$ (oppure $G \equiv -1$) allora l'equazione parabolica degenere che si ottiene è

$$\partial_t u = |Du| \quad (\text{oppure} \quad \partial_t u = -|Du|).$$

Questa equazione è anche il modello fondamentale della matematica morfologica, d'altra parte dilatazione ed erosione possono essere interpretate come un moto di curve di livello con velocità costante nella direzione del gradiente.

(2) Se l'analisi multiscala è anche invariante per isometrie e per trasformazioni affini allora la funzione G dipende solo dalla curvatura ed un modello possibile è il seguente

$$\partial_t u = |Du|\,(curv(u))^{1/3}. \tag{7}$$

Questa equazione è stata trovata indipendentemente da G. Sapiro e A. Tannenbaum, (si veda [17]), nell'ambito dello studio dell'evoluzione di curve nel piano, come equazione del calore intrinseca

$$C_t = C_{ss} \tag{8}$$

dove s è la lunghezza d' arco affine. (Questa equazione descrive il moto delle curve di livello di una soluzione di (7): è in questo senso che i due modelli sono equivalenti).

Infatti, sia $C : S^1 \times [0, T[\to \mathbf{R}^2$ una famiglia di curve regolari , $C = C(p,t)$ con p parametro della curva. Supponiamo che la famiglia evolva secondo l'equazione (8), dove s è la lunghezza affine definita implicitamente dalla relazione

$$det\,[C_s, C_{ss}] = 1.$$

Poichè

$$T_{aff} \equiv C_s = C_p \frac{dp}{ds},$$

(vettore tangente affine),

$$N_{aff} \equiv C_{ss} = C_{pp}\left(\frac{dp}{ds}\right)^2 + C_p \frac{d^2p}{ds^2}$$

(vettore normale affine) e $C_{pp} = kN$ con k, N, rispettivamente la curvatura media e la normale alla curva, si ha

$$1 = det\,[C_s, C_{ss}] = det\,[C_p, C_{pp}]\left(\frac{dp}{ds}\right)^3 = k\left(\frac{dp}{ds}\right)^3.$$

Allora, nei punti in cui la curvatura è diversa da zero, si ha

$$C_{ss} = C_{pp}k^{-2/3} + C_p\frac{d^2p}{ds^2} = k^{1/3}N + \frac{d^2p}{ds^2}T$$

e quindi l'equazione (8) diventa

$$C_t = k^{1/3}N + \frac{d^2p}{ds^2}T.$$

La componente tangenziale $\frac{d^2p}{ds^2}$ può essere trascurata, infatti essa produce solo un moto dei punti lungo la curva stessa e quindi non ha nessuna influenza sulla evoluzione della curva intera.

In [16] viene provato che l'evoluzione secondo (8) conserva la convessità ed la famiglia di curve evolve ad un punto (diventando prima un ellisse), più precisamente: se C_0 è una curva regolare allora esiste una famiglia $C = C(s,t)$ di curve regolari tali che

$$\begin{cases} \partial_t C = C_{ss} & \text{in } S^1 \times [0,T[, \\ C|_{t=0} = C_0. \end{cases}$$

Inoltre, esiste $t_0 \in [0,T[$ tale che per ogni $t \geq t_0$ la curva $C(\cdot,t)$ è convessa.

Guichard in [11] ha invece provato che se il dato iniziale u_0 è una funzione lipschitziana allora l'equazione (7) ha un'unica soluzione viscosa $u(x,t)$ lipschitziana in x e hölderiana in t di esponente $3/4$.

Osserviamo infine che l'equazione (2) del moto per curvatura media corrisponde all'equazione intrinseca $C_t = C_{ss}$ con s ascissa curvilinea.

3. L'analisi di immagini in movimento.

Un filmato oppure una sequenza di immagini può essere formalizzato mediante una funzione limitata $u = u(z,\theta)$, dove $z \in \mathbf{R}^2$ è la variabile spaziale, θ il tempo e $u = u(z,\theta)$ il livello di grigio del punto z al tempo θ.

Consideriamo un'analisi multiscala del tipo

$$\partial_t u = F(D^2u, Du, t), \quad u = u(t,z,\theta)$$

dove la funzione $F = F(A,p,t)$ è non decrescente rispetto al primo argomento ed è continua se $p \neq 0$.

Gli assiomi morfologici nelle variabili spaziali impongono in particolare che

$$F(\lambda A, \lambda p, t) = \lambda F(A,p,t), \quad \forall \lambda \geq 0, \forall A \in S^3, \forall p \in \mathbf{R}^3, p \neq 0,$$

$$F(A,p,t) = F(Q_p A Q_p, p, t), \quad \text{per ogni} \quad A \in S^3, p \in \mathbf{R}^3, p \neq 0, Q_p = I_N - \frac{pp}{|p|^2}.$$

Si possono inoltre introdurre nuovi assiomi che tengono conto della particolare natura del film.

[*Invarianza gallileiana*] (Un moto con velocità costante dell'intera figura non altera l'analisi).

Se $B_v(x,y,\theta) = (x - v_1\theta, y - v_2\theta, \theta)$ rappresenta un moto uniforme con velocità $v = (v_1, v_2)$ allora

$$F(B_v^t A B_v, B_v^t p, t) = F(A,p,t), \quad \forall v \in \mathbf{R}^2.$$

[*Invarianza rispetto al tempo*] (L'analisi è invariante se il film viene uniformemente accelerato oppure decelerato).

$\forall \lambda \in \mathbf{R}$ e $t \geq 0$ esiste $t' \geq 0$ tale che la funzione $t' = t'(\lambda,t)$ è differenziabile rispetto λ e

$$F(S_\lambda A S_\lambda^t, S_\lambda p, t) = \frac{\partial t'}{\partial \lambda} F(A,p,t),$$

dove $S_\lambda(x,y,\theta) = (x,y,\lambda\theta)$.

L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions e J.M. Morel in [1] hanno dimostrato che l'unico modello dell'analisi multiscala verificante gli assiomi precedenti è il seguente

$$\partial_t u = |\nabla u|\, curv(u)^{\frac{1-q}{3}} \left(sgn(curv(u))\, accel^q(u)\right)^+, \quad q \in [0,1], \tag{9}$$

dove ∇u è il gradiente spaziale, $curv$ è la curvatura spaziale delle linee di livello,

$$curv(u) = \frac{((D^2u)Du^\perp, Du^\perp)}{|\nabla u|^3}, \quad Du^\perp = (-u_y, u_x, o)$$

e *accel* è un operatore differenziale del secondo ordine, detto accelerazione apparente, l'unico termine dell'equazione che fa intervenire le derivate rispetto al tempo θ, definita nel seguente modo

$$accel(u) \equiv \left(\gamma_3 - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1}\right) \frac{1}{|\nabla u|^5} \tag{10}$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= ((D^2u)Du^\perp, Du^\perp), \\ \gamma_2 &= ((D^2u)Du^\perp, Du^\pm), \\ \gamma_3 &= ((D^2u)Du^\pm, Du^\pm) \end{aligned}$$

e $Du^\pm = (u_x u_\theta, u_y u_\theta, -(u_x^2 + u_y^2))$.

Significato dell'accelerazione apparente.

Supponiamo che una figura si muova con moto di traslazione e che la funzione $v = v(x, y, \theta) = (v_x(\theta), v_y(\theta))$ rappresenti la velocità del punto (x, y) al tempo θ. Supponiamo che il valore del livello di grigio di un punto non cambi durante il suo moto, cioè

$$u(x(\theta), y(\theta), \theta) = cost,$$

allora derivando rispetto a θ si ottiene

$$(v, \nabla u) + u_\theta = 0.$$

Siano v_1 la velocità nella direzione del gradiente spaziale

$$v_1 \equiv \frac{(v, \nabla u)}{|\nabla u|} = \frac{-u_\theta}{|\nabla u|}$$

e v_2 la velocità nella direzione ortogonale al gradiente spaziale

$$v_2 \equiv \frac{(V, Du^\perp)}{|\nabla u|}, \quad V = (v, 1).$$

Allora si può dimostrare che

$$v_2 = \gamma_2/(\gamma_1 |\nabla u|)$$

e

$$accel(u) = -\frac{dv_1}{d\theta} = -(Dv_1, V), \tag{11}$$

(la variazione di v_1 lungo la traiettoria del punto considerato).

Supponiamo infatti che la figura $w = w(x, y)$ si muova con moto di traslazione e $u = u(x, y, \theta)$ sia la figura w in movimento, allora

$$u(x, y, \theta) = w\left(x - \int_0^\theta v_x(s)ds, y - \int_0^\theta v_y(s)ds\right).$$

Senza perdere di generalità possiamo supporre che al tempo $\theta = 0$ gli assi (i, j) siano tali che i sia nella direzione del gradiente spaziale e $(j, \nabla u) = |\nabla u|$. Allora $Dw = (|\nabla w|, 0, 0)$, $v_1(\theta) = v_x(\theta)$, $v_2(\theta) = v_y(\theta)$. Inoltre

$$\begin{aligned} Du &= (|\nabla w|, 0, -v_1|\nabla w|), \\ Du^\perp &= (0, |\nabla w|, 0), \\ Du^\pm &= |\nabla w|(-v_1|\nabla w|, 0, -|\nabla w|), \end{aligned}$$

è una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$.

Scrivendo poi la matrice hessiana di u e calcolando le sue restrizioni alla base prima definita si ottiene una espressione esplicita di γ_1, γ_2, γ_3 e di v_2 in funzione di questi.

Infine utilizzando la definizione (10) si ottiene la (11).

Si può anche dimostrare che il vettore

$$V = \frac{1}{|\nabla u|^2}\left(Du^\perp \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - Du^\pm\right),$$

che è uguale alla velocità reale nei moti di traslazione, è tale che

$$accel(u) = \frac{((D^2u)V, V)}{|\nabla u|} = |V|^2\left(\frac{(D^2u)V}{|V|}, \frac{V}{|V|}\right)|\nabla u|^{-1}.$$

Infine, si osservi che $\left(\frac{(D^2u)V}{|V|}, \frac{V}{|V|}\right)|\nabla u|^{-1}$ è la curvatura della curva di livello di u nel piano generato da ∇u e V.

Osservazioni. L'equazione (9) si può scrivere in termini di curvatura della superficie si livello della $u = u(z, \theta)$ e della curvatura media spaziale degli insiemi di livello passanti per z, ad esempio per $q = 1/4$ l'equazione diventa

$$\partial_t u = \left(\left(\frac{\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2}{|\nabla u|^4}\right)^+\right)^{1/4} = |Du|\,(G^+(u))^{1/4} \tag{12}$$

dove $G(u)(z, \theta)$ è la curvatura gaussiana della superficie di livello di u passante per (z, θ).

L'equazione (12) è stata individuata, utilizzando metodi completamente differenti, anche da P.J. Olver, G. Sapiro e A. Tannabaum in [14] come un'equazione

di evoluzione di superfici, la più semplice equazione che sia invariante rispetto alle trasformazioni affini.

Recentemente, Andrews in [4] ha provato che le superfici convesse di classe C^2 che evolvono secondo l'equazione (12) convergono ad un punto ellissoideo. (Si veda anche l'articolo precedente di Tso, [19]).

Caselles e Sbert, hanno studiato sotto vari aspetti l'equazione

$$\partial_t u = |Du| segno(k_1)((k_1 k_2)^+)^\sigma, \; u = u(x,t), \; x \in \mathbf{R}^3$$

dove k_1 e k_2 in x sono le curvature principali della superficie di livello di u passante per x. Per $\sigma = 1/4$ si ottiene la (12). In [5], viene dimostrato, (anche per equazioni in una forma più generale), che se u_0 è una funzione continua e costante per $|x|$ grande, allora esiste un'unica soluzione viscosa , continua e costante per $|x|$ grande.

Recentemente, Mikula, Sarti e Sgallari hanno proposto per l'elaborazione di sequenze di immagini tridimensionali, il modello

$$\partial_t u = |\nabla u| \, (sgn(curv(u)) \, accel(u))^+ \, div \, (g(|DG_\sigma * u|)Du).$$

In [18] vengono forniti esperimenti numerici incoraggianti.

Bibliografia

[1] L. Alvarez, F. Guichard, P.L.Lions and J.M.Morel, *Axioms and fundamental equations of image processing*, Arch. Rat. Mech. Anal. **16** (1993), 200-257.

[2] L. Alvarez, P.L. Lions and J.M. Morel, *Image selective smoothimg and edge detection by nonlinear diffusion (II)*, SIAM J. Numer. Anal. **29** (1992), 845-866.

[3] L. Alvarez and J.M.Morel, *Formalization and computational aspect of image analysis*, Acta Num. (1994), 1-61.

[4] B. Andrews, *Contraction of convex hypersurfaces by their affine normal*, J. Diff. Geom. **43** (1996), 207-230.

[5] V. Caselles and C. Sbert, *What is the best casual scale space for 3d images?*, SIAM J. Appl. Math. **56** (1996), 1199-1246.

[6] F. Catté, P.L. Lions, J.M. Morel and T. Coll, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM J. Num. Anal. **29** (1992), 182-193.

[7] Y.G.Chen, Y.Giga and S.Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 749-786.

[8] M.G. Crandall, H. Ishii and P.L. Lions, *User'guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 1-67.

[9] L.C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 635-681.

[10] Y. Giga, S. Goto, H. Ishii and M.H. Sato, *Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domain*, Ind. Univ. Math. J. **40** (1991), 443-470.

[11] F. Guichard, *Axiomatisation des analyses multi-échelle d'images et de films*, Tesi di Dottorato, (1994).

[12] K. Holling and J.A. Nohel, *A diffusione equation with a nonmonotone constitutive function*, Proc. on Syst. of Nonlinear Part. Diff. Eqs. J. Ball Ed., Reide Boston MA (1963), 409-422.

[13] V. Oliker, *Self-similar solutions and asymptotic behavior of flows of nonparametric surfaces driven by gauss or mean curvature*, Symp. Pure Appl. Math. **54** (1993), 389-402.

[14] P.J. Olver, G. Sapiro and A. Tannenbaum, *Invariant geometric evolutions of surfaces and volumetric smoothing*, SIAM J. Appl. Math. **57** (1997), 176-194.

[15] P. Perona and J. Malik, *Scale space and edge detection using anisotropic diffusion*, Proc. IEEE Computer Soc. Workshop on Computer Vision (1987).

[16] G. Sapiro, P. Olver and A. Tannenbaum, *Classification and uniqueness of invariant geometric flows*, C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math **319** (1994), 339-344.

[17] G. Sapiro and A.Tannenbaum, *On affine plane curve evolution*, J. Funct. Anal. **119** (1994), 79-120.

[18] K. Mikula, A. Sarti and F. Sgallari, *Model and numerical methods for nonlinear multiscale analysis of 3D image sequences*, preprint.

[19] K. Tso, *Deforming a hypersurface by its gauss-Kronecker curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 867-882.

[20] A.P. Witkin, *Scale space filtering*, Proc. IJCAI, Karlsruhe **2** (1983), 1019-1021.